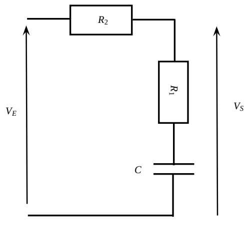
TD n° 1: Electrocinétique
Révisions sur le filtrage analogique - analyse spectrale - traitement numérique

Signaux périodiques - Effet des filtres

Exercice n°1: **Analyse spectrale et temporelle de la réponse d'un filtre**

On considère le circuit représenté sur la figure ci-contre, composé d'un condensateur de capacité $C = 10\ nF$ et de deux résistances $R_1 = 10\ k\Omega$ et $R_2 = 90\ k\Omega$.



❶ Déterminer le rapport d'amplitude $\left|\frac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}}\right|$ à basses fréquence et haute fréquence en raisonnant directement sur le schéma.

❷ Déterminer la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{V_S}}{\underline{V_E}}$ sous la forme $H(j\omega) = H_0 \frac{1 + j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_2}$

❸ Donner le diagramme de Bode asymptotique en amplitude à partir de deux fonctions de transfert du 1er ordre que l'on indiquera.

❹ Déterminer la pulsation de coupure à $-3\ dB$.

❺ Donner l'équation différentielle de $V_S(t)$ en fonction de $V_e(t)$.

❻ On place un signal d'entrée $V_E(t) = A \cdot \cos^2(\omega t)$ avec $A = 1\ V$ et $\omega = 5.10^4\ rad.s^{-1}$. Déterminer le signal de sortie.

❼ On place maintenant en entrée un échelon de tension unitaire à $t = 0$:

$$V_E(t > 0) = A$$

On précise que toutes les tensions étaient nulles avant $t = 0$, et que le condensateur était déchargé.

Déterminer le signal de sortie. Tracer l'allure de $V_s(t)$.

Exercice n°2: **Filtrage fréquentiel**

On considère un signal triangulaire périodique $e(t)$ de fréquence $f_0 = 50\ Hz$ (pulsation fondamentale notée ω_0) dont on donne la décomposition en série de Fourier:

$$e(t) = \frac{8E}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos\left[(2p+1)\omega_0 t\right]$$

Ce signal traverse un filtre linéaire dont la fonction de transfert est:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

❶ Quelle est la nature du filtre exploité ici?

❷ On ne se préoccupe pas du déphasage introduit par le filtre. On cherche à obtenir une atténuation de moitié de la puissance de l'harmonique de rang 5. Quelle fréquence de coupure ω_C du filtre doit-on choisir? Quelle est alors l'atténuation sur la puissance:
- du fondamental?
- de l'harmonique de rang 3?
- de l'harmonique de rang 7?

Quelle est l'amplitude de l'harmonique de rang 7 par rapport à celle du fondamental après filtrage?

❸ L'atténuation de cet harmonique n'est pas suffisante. On se propose alors de "cascader" 3 filtres identiques ayant la même fréquence de coupure.

a· Déterminer la fonction de transfert du filtre résultant de cette association. Quelle hypothèse doit on faire sur les caractéristiques d'entrée du filtre?

b· Quelle est alors l'atténuation sur la puissance:
- du fondamental?
- de l'harmonique de rang 3?
- de l'harmonique de rang 5?
- de l'harmonique de rang 7?

Quelle est l'amplitude de l'harmonique numéro 7 relativement à l'amplitude du fondamental après filtrage ? Quelle est l'atténuation en dB par décade de ce filtre?

EXERCICE N°3: Détermination des caractéristiques d'un filtre par exploitation d'oscillogrammes

Pour analyser les composantes fréquentielles d'un signal sonore, on utilise un transducteur (microphone) qui convertit le signal en une tension v_e, puis un filtre passe-bande qui extrait les composantes sinusoïdales de v_e, de fréquences voisines d'une fréquence f_0 donnée. On note v_e la tension de sortie du filtre. Le filtre est un circuit linéaire dont la fonction de transfert s'écrit:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

On se propose de déterminer les caractéristiques H_0, Q et ω_0 du filtre à partir des oscillogrammes obtenus en régime périodique pour une tension d'entrée v_e rectangulaire pour deux valeurs de fréquences. On rappelle la décomposition en série de Fourier

$$v_e(t) = V_0\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\left[(2k+1)\omega_1 t\right]}{2k+1}\right) \quad \text{avec} \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

- Première expérience (oscillogramme de la figure 1):
  - voies 1 et 2 en position DC - base de temps à $50\mu s/div$ - sensibilités à $0,5\ V/div$ en voie 1 et $2\ V/div$ en voie 2

  Dans cette expérience: la tension V_s obtenue est quasisinusoïdale et si on augmente ou diminue la fréquence de T par rapport à la valeur correspondant à cet oscillogramme, on constate que l'amplitude de V_s diminue.
- Seconde expérience (oscillogramme de la figure 2):
  - voies 1 et 2 en position DC - base de temps à $5\mu s/div$ - sensibilités à $2\ V/div$ en voie 1 et $0,2\ V/div$ en voie 2

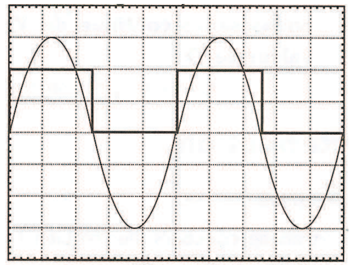


Figure 1

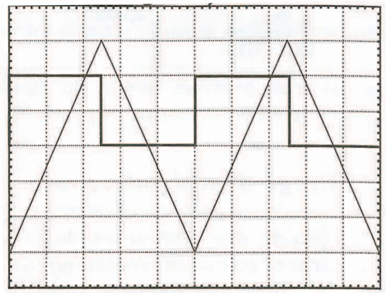


Figure 2

❶ Pourquoi dans chaque expérience, la tension V_s de sortie ne comporte-t-elle pas de composante continue contrairement à la tension d'entrée V_e?

❷ Première expérience: pourquoi peut-on obtenir une tension de sortie V_s quasi-sinusoïdale alors que la tension v_e est rectangulaire?

❸ Déduire de l'oscillogramme de la première expérience et du commentaire qui l'accompagne: la pulsation ω_0 et la valeur de H_0.

❹ Dans la deuxième expérience, V_s est triangulaire alors que V_e est rectangulaire. Le filtre a donc un comportement intégrateur.

a· Donner l'expression approchée de $H(j\omega)$ dans le domaine de fréquences correspondant à la deuxième expérience.

b· En utilisant l'oscillogramme de la deuxième expérience, déterminer en justifiant précisément la méthode utilisée, le rapport $\dfrac{H_0\omega_0}{Q}$ (on se souviendra que la composante continue n'est pas intégrée). En déduire la valeur de Q.

Non linéarité - introduction/suppression d'harmoniques

EXERCICE N°4: Linéarité et non linéarité des filtres

On envoie en entrée de différents filtres le signal $e(t)$ dont le spectre en amplitude est représenté en figure ci-contre. On note la fréquence réduite $x = \dfrac{f}{f_0}$ avec $f_0 = 1\ kHz$.

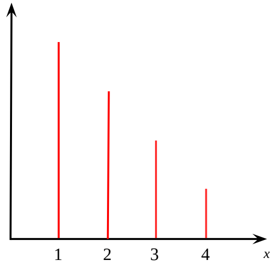


Figure 1: Spectre du signal $e(t)$

On obtient en sortie des filtres (1), (2), et (3) un signal $s(t)$ dont les spectres en amplitude sont donnés en figures ci-dessous.

❶ Quel est (ou quels sont) le(s) filtre(s) non linéaire(s)?

❷ Caractériser les filtres linéaires et donner un ordre de grandeur de leur fréquence de coupure.

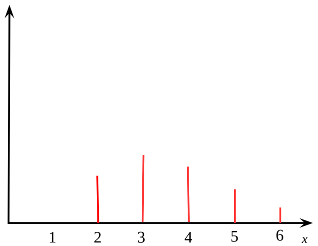


Figure 2: spectre de sortie (1)

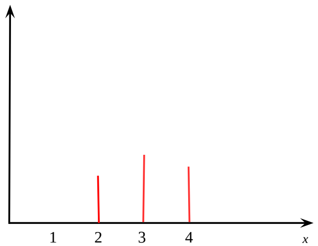


Figure 3: Spectre de sortie (2)

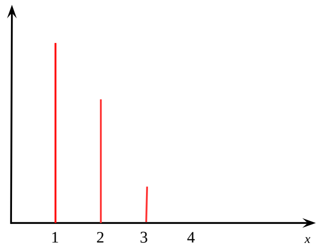


Figure 4: Spectre de sortie (3)

Exercice n°5: Détection de signaux micro-ondes

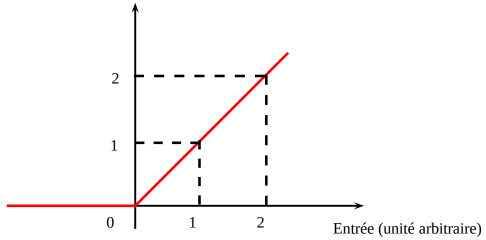
Un signal reçu par une antenne dans le domaine hyperfréquence est assimilé à une onde sinusoïdale d'amplitude A et de fréquence f. On désire déterminer son amplitude, qui est supposée contenir l'information utile, en sachant que la phase à l'origine n'est pas stable, ce qui empêche de recourir aux procédés usuels (détection synchrone, cf futur TP)

❶ **Insuffisance d'un simple procédé de filtrage**

a· L'utilisation d'un filtre moyenneur, de type passe-bas, appliqué au signal reçu, suffit-elle?

b· Montrer par un examen de l'aspect spectral, qu'il est vain de chercher à effectuer la détection par simple filtrage.

❷ On utilise un composant à base de diode (jonctions semi-conductrices) réalisant un opérateur dont la relation entrée-sortie est donnée en figure ci-dessous:



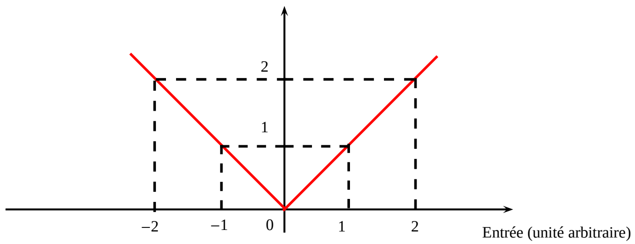
a· Représenter sur un même graphe le signal d'entrée et le signal de sortie, en considérant la phase à l'origine du signal reçu comme une constante, de valeur quelconque (on omet ses fluctuations)

b· Justifier le qualitatif de redresseur donné à l'opérateur.

c· Déterminer les fréquences des 3 premières raies spectrales du signal sortant de l'opérateur.

d· Quel type de filtre permet, à partir du signal de sortie, de récupérer un signal constant D, dont la valeur est proportionnelle à A? Préciser la constante de proportionnalité $\dfrac{D}{A}$ caractérisant la senseibilité du détecteur, en considérant que le gain du filtre est égal à l'unité pour la composante utile.

❸ On préfère généralement utiliser un autre opérateur, appelé redresseur bi-alternance, dont la caractéristique est donnée ci-dessous.



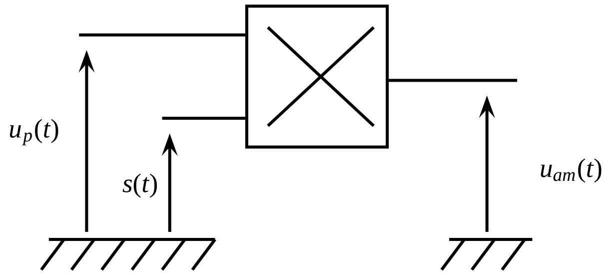
a· Les raies spectrales du signal obtenu sont-elles situées aux mêmes fréquences que celles obtenues précédemment?

b· On place un filtre de même type que celui proposé ci-dessus, indiquer quels avantages l'opérateur redresseur bi-alternance procure par rapport au redresseur simple.

c· Préciser la nouvelle constante de proportionnalité $\dfrac{D'}{A}$, où D est la valeur du signal sortant du filtre.

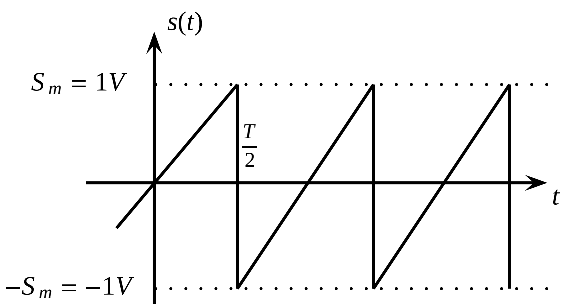
Exercice n°6: **Analyse spectrale d'une modulation**

La transmission hertzienne des signaux, de nature analogique comme numérique, nécessite pour des raisons physiques de transmettre ces derniers en haute fréquence. Pour cela, on a recours au principe de modulation (modulation d'amplitude dans le cas présent (cf TP n°7)), opération réalisée dans cet exercice par un multiplieur (cf schéma ci-dessous).



Le signal BF à transmettre $s(t)$ est un signal de fréquence $1\ kHz$ de type dent de scie, tandis que le signal HF dit de porteuse $u_p(t) = U_p \cos \omega_p t$ est de fréquence $f_p = 100\ kHz$. La valeur maximale de cette tension est de $U_p = 3V$. L'opération de multiplication réalisée par l'opérateur est telle que:

$$u_{AM} = [k \cdot s(t) + 1] \times u_p(t) \quad \text{avec } k = 0,67\ V^{-1}$$



❶ Représenter l'allure du signal modulé en amplitude $u_{AM}(t)$.

❷ Analyse spectrale

a· Montrer que la série de Fourier du signal $s(t)$ peut s'écrire:

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\Omega t$$

b· Montrer que $b_n = (-1)^{n+1} \dfrac{2S_m}{n\pi}$

c· Les bandes passantes des composants qui constituent les circuits de transmission sont limitées. On s'intéresse uniquement aux harmoniques de $s(t)$ dont l'amplitude est supérieure ou égale au cinquième de celle du fondamental. Quel est le nombre d'harmoniques nécessaires pour décrire le signal $s(t)$? Donner alors l'expression approchée de $s(t)$.

d· Représenter l'allure du spectre du signal.

e· Quelle est la bande de fréquence, Δf, occupée par le signal modulé en amplitude $u_{AM}(t)$?

❸ Calcul de la puissance moyenne

a· En l'absence de signal modulant à l'entrée du multiplicateur, calculer la puissance moyenne P_0 que dissiperait $u_{AM}(t)$ aux bornes d'une résistance R.

b· On applique maintenant le signal modulant $s(t)$, calculer la puissance moyenne P que dissiperait $u_{AM}(t)$ toujours aux bornes d'une résistance R. On exploitera la décomposition spectrale effectuée à la question précédente.

c· En déduire la valeur du rapport $\dfrac{P_0}{P}$. Conclusion.

Echantillonnage de signaux - Signaux numériques

Exercice n°7: **Repliement**

On échantillonne un signal analogique à $500\ Hz$. Ce signal est la somme de 3 sinusoïdes pures de fréquences 50, 100, et $300\ Hz$.

❶ Donner l'allure du spectre de ce signal analogique.

❷ Donner l'allure du spectre du signal échantillonné.

❸ Donner enfin l'allure du signal analogique reconstruit à partir du signal échantillonné. On pourra s'aider d'une calculatrice graphique pour ce travail.

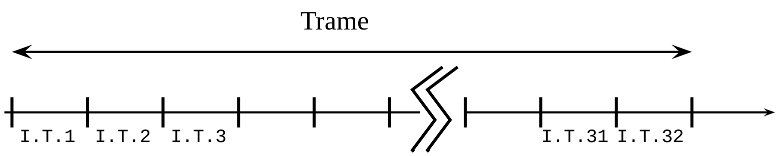
Exercice n°8: **Multiplexage temporel d'une transmission téléphonique**

L'augmentation incessante des coûts de production des métaux a forcé les électroniciens à trouver des solutions permettant d'économiser l'exploitation des conducteurs électriques lorsqu'il s'agit de véhiculer des signaux par voie filaire. Parmi les solutions envisagées, le multiplexage est l'une des plus répandues aujourd'hui; elle est couramment employée dans les voitures modernes, mais également dans l'installation des lignes téléphoniques dont il est question dans cet exercice.

Un de ces systèmes est le M.I.C pour **M**odulation d'**I**mpulsions et **C**odage, permettant la transmission simultanée de 30 communications sur la même ligne.

❶ Pour ce faire, chaque signal est tout d'abord numérisé. Justifiez le choix de la cadence de 8000 échantillons par seconde, sachant que la bande fréquentielles est limitée à $[300\ Hz; 3400\ Hz]$.

Afin d'assurer la transmission simultanée de 30 voix, le signal est organisé en trames de 32 intervalles de temps (IT) chaque communication se voyant assigner un I.T. par trame (cf figure ci-dessous). Les deux I.T. restants servent à la gestion du réseau.



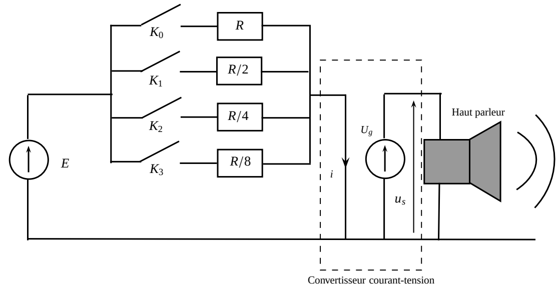
❷ Quelle est la durée d'une trame? En déduire le débit d'échantillons par seconde, toutes communications confondues. Chaque signal vocal est numérisé sur 8 bits selon une loi non linéaire (on parle de compression)

❸ Déterminer le débit binaire, exprimé en bits par seconde, du signal complet.

❹ La loi de compression distribue les niveaux de quantification de manière non équidistante, le quantum étant plus faible pour les faibles valeurs de signal. Quel en est l'intérêt, sachant que les signaux vocaux varient dans une large gamme d'amplitude?

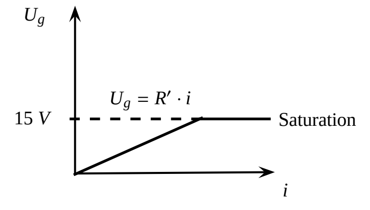
Exercice n°9: **Etude d'un CAN 4 bits à résistances pondérées dans un lecteur de CD**

Les haut-parleurs de chaine Hifi fonctionnent avec des signaux analogiques; ainsi, la restitution par ses derniers du son enregistré sous forme numérique sur un support optique CD nécessite l'utilisation d'un CNA ou convertisseur numérique-analogique. On propose ici l'étude d'un CNA 4 bits à résistances pondérées dont le schéma de principe est donnée ci-dessous:



Il est constitué d'une tension E constante de référence, de 4 résistances notées n $(0 \leq n \leq 3)$ de valeur $R_n = \dfrac{R}{2^n}$ et de 4 interrupteurs K_n. Un interrupetur ouvert est l'état 0 et un interrupteur fermé est l'état 1.
Par exemple, 1101 signifie $K_3 = 1$, $K_2 = 1$, $K_1 = 0$, et $K_0 = 1$. Un convertisseur courant-tension (bloc en pointillés) donne une tension U_g.

On donne la caractéristique entrée-sortie du convertisseur (voir tracé ci-contre); il se comporte en sortie comme un générateur de tension parfait de $f.e.m.$ $U_g = R'i$ tant que la tension de saturation $V_{sat} = 15\ V$ n'est pas atteinte. Il sature à $V_{sat} = 15\ V$ si on lui demande une tension supérieure.



❶ Déterminer l'intensité du courant circulant dans la résistance R_n en fonction de K_n, R, et E. En déduire u_s en fonction des K_n, de R, R', et de E. Commenter le résultat obtenu.

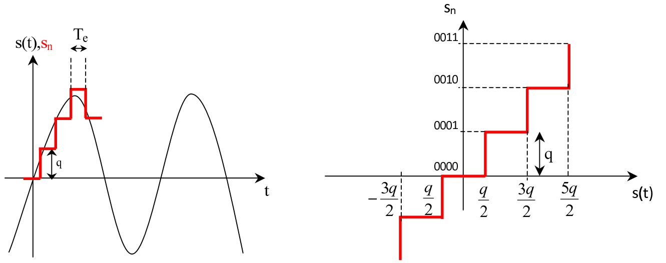
❷ Application numérique. On choisit dans un premier temps $R = R'$ et $E = 1\ V$. Calculer la valeur de tension correspondant à 0000, 0001, 0010, 0011, 0100. Calculer également la tension de sortie maximale, correspondant 1111.Commentaire?

❸ En réalité, le signal audio est enregistré sur un CD avec $16\ bits$. On place donc en parallèle 16 résistances de valeurs $R_n = \dfrac{R}{2^n}$ $(0 \leq n \leq 15)$. Calculer la valeur maximale correspondante (convertie en décimal), et en déduire la tension maximale demandée en sortie de montage. Quel problème cela pose-t-il

❹ Pour remédier à ce problème, on décide de changer les valeurs de R, R', et E. Quelle condition doivent vérifier les composants pour que le convertisseur courant-tension ne soit jamais saturé?

Exercice n°10: **Erreur de quantification**

Du fait de la numérisation d'un signal par un convertisseur à loi linéaire, une erreur d'arrondi est commise sur chaque échantillon.



❶ En notant q le pas de quantification, préciser dans quel intevalle l'erreur d'arrondi ϵ prend sa valeur.

❷ Lors d'un essai du convertisseur avec un signal triangulaire, quelle est l'évolution temporelle de $\epsilon(t)$ (on raisonnera sur une portion croissante de l'entrée)?

❸ En raisonnant sur une période T de $\epsilon(t)$, quelle valeur moyenne peut-on lui attribuer? Quelle moyenne quadratique? Quelle valeur efficace ϵ_{eff}?

<u>Application numérique:</u> comparer ϵ_{eff} et la dynamique Δs pour un convertisseur linéaire 8 $bits$ ou 12 $bits$.

<u>NB:</u> on appelle dynamique Δs l'intervalle dans lequel peut évoluer le signal numérisé s_n (numérisation du signal $s(t)$. Par ailleurs, le CAN est dit linéaire si le pas de quantifiation q est constant sur toute la dynamique Δs.

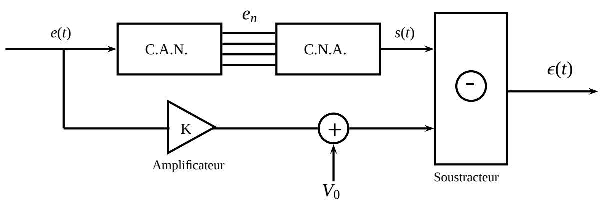
❹ Lors d'une phase de décroissance du signal échantillonné, les propriétés précédentes sont-elles retrouvées à l'identique?

❺ Pour un signal d'entrée de forme quelconque, dont l'amplitude est élevée devant le pas de quantification, quel argument permet de considérer les résultats précédents comme une bonne approximation des propriétés de $\epsilon(t)$?

Exercice n°11: **Bruit de quantification**

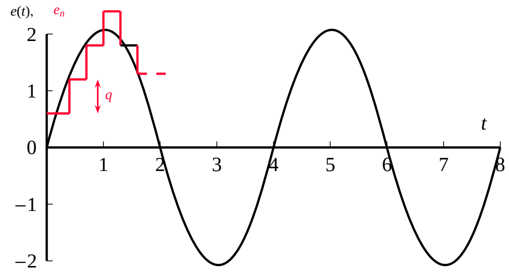
Lors de la numérisation d'un signal par un C.A.N. (convertisseur analogique numérique), les arrondis des valeurs échantillonnées engendrent une perte d'information. Si l'on place un C.N.A. (convertisseur numérique analogique) en sortie du C.A.N., on obtient donc un signal analogique altéré que l'on peut donc décrire comme un signal "bruité".

Pour étudier ce "bruit" de quantification, on propose le montage suivant:



Les deux signaux $e(t)$ et $s(t)$ obtenus respectivement en entrée et en sortie de l'association sont soustraits l'un à l'autre; le convertisseur analogique numérique est linéaire et de pas q constant (écart fixe entre deux valeurs successives du signal numérisé).

L'amplificateur K et l'aditionneur permettent de modifier le signal $e(t)$ (amplification et/ou ajout d'une tension V_0) afin de compenser un éventuel décalage ou une atténuation; on les suppose réglés de telle manière que $s(t) = e(t)$ lorsque la valeur de $e(t)$ correspond exactement à un multiple du pas de quantification q dont la signification est donnée sur le schéma ci-dessous:



Soit $\epsilon(t) = s(t) - e(t)$ l'erreur d'arrondi commise à un instant t; on décrit ici $\epsilon(t)$ comme une variable aléatoire.

❶ Dans quel intervalle I l'erreur $\epsilon(t)$ prend-elle sa valeur?

❷ On suppose ϵ uniformément distribuée sur cet intervalle, défnir sa fonction de répartition:

$$F(x) = Prob(\epsilon < x)$$

qui est la probabilité que l'erreur soit inférieure à x.

❸ La dérivée de la fonction de répartition est la fonction de distribution $f(x)$; exprimer $f(x)$ et tracer son graphe.

❹ Quelle est la valeur moyenne de ϵ?

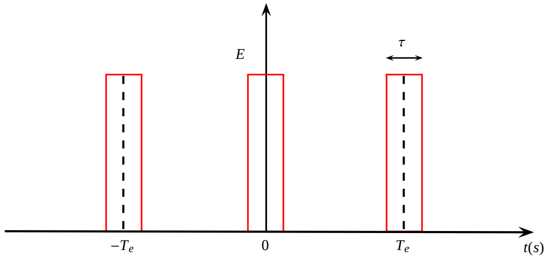
❺ On précise que la moyenne quadratique de ϵ s'exprime comme:

$$<\epsilon^2>= \int_I x^2 f(x) \cdot dx$$

Déterminer $<\epsilon^2>$ et sa racine carrée.
Que représente cette dernière grandeur? Comment la mesure-t-on?

EXERCICE N°12: **Spectre d'un signal numérique**

On considère le signal $p(t)$ formé d'une suite périodique d'impulsions de largeur τ:



On rappelle l'expression du rapport cyclique $\alpha = \dfrac{\tau}{T_e}$ d'un signal T_e périodique, τ désignant le temps passé "en haut" lors d'une impulsion du signal.

❶ Quelle relation peut-on écrire entre les coefficients C_n de la série de Fourier et la transformée de Fourier $\tilde{I}(\nu)$ de l'impulsion de largeur τ et de hauteur E? On rappelle l'expression de la transformée de Fourier du signal $I(t)$:

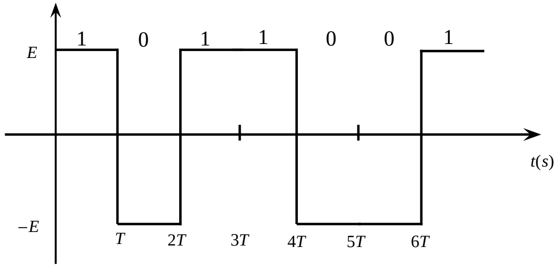
$$\tilde{I}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t) \cdot e^{-j2\pi\nu t} \cdot dt$$

❷ Cette relation est-elle générale, lorsque le motif répété est un signal de forme quelconque défini sur l'intervalle $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$?

❸ Un émetteur envoie périodiquement (période T) des caractères binaires 0 ou 1 codés de la manière suivante:

- l'émission du caractère 1 se traduit par une impultion d'amplitude E pendant la durée T.
- l'émission du caractère 0 se traduit par une impulsion d'amplitude $-E$ pendant la même durée.

Si l'on note $I(\nu)$ la transformée de Fourier de l'impulsion, justifier sans développement important que la densité spectrale de puissance du signal, c'est à dire la puissance par unité de fréquence comprise entre ν et $\nu + d\nu$, soit proportionnelle à $\dfrac{1}{T} \cdot |I(\nu)|^2$



❹ Que devient alors le spectre, si l'on remplace l'impulsion précédente par un train d'onde sinusoïdal de fréquence $\nu_0 >> \dfrac{1}{T}$ et de durée T? Proposer une forme vraisemblable pour le spectre d'une telle communication.
